Урок №7 (1.10.2019)
Затухающие и вынужденные колебания.

1. Затухающие колебания.

Сухое трение.

Если у нас осциллятор движется в системе с сухим трением, то его движение описывается системой уравнений:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -kx - \mu mg, \text{ при } \dot{x} > 0 \\ m\ddot{x} = -kx + \mu mg, \text{ при } \dot{x} < 0 \end{cases}$$

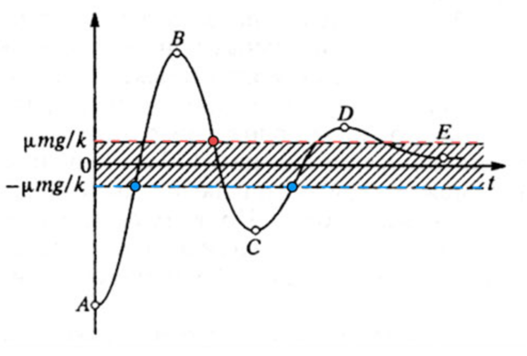
Таким образом, приходится решать два уравнения, которые сменяют друг друга при прохождении точки максимального отклонения. Если при этом возвращающей силы не хватит, для преодоления силы трения, то тело осциллятора останавливается: вблизи положения равновесия существует *область застоя*, шириной $2\mu mg / k$.

Если начальное смещение меньше, чем $\mu mg / k$, то тело покоится, если больше – возникают затухающие колебания.

Каждое из уравнений системы описывает гармонические колебания с частотой $\omega_0 = \sqrt{k / m}$. Наличие постоянной силы приводит к смещению положения равновесия: переписав уравнение колебаний в виде $m\ddot{x} = -k\left(x - x_0\right)$, найдём: $x_0 = \pm\dfrac{\mu mg}{k}$.

Фактически наши рассуждения означают следующее. Пока тело движется в положительном направлении (участки AB и CD на рисунке), на него действует постоянная сила, смещающая центр колебаний в точку $x_c = -\dfrac{\mu mg}{k}$ (на рисунке отмечено синим цветом). В момент разворота и начала движения в отрицательном направлении сила трения меняет знак, положение равновесия «мгновенно» перемещается в $x_c = +\dfrac{\mu mg}{k}$. Центр колебаний перемещается в точку, обозначенную на рисунке красным цветом. Так происходит до тех пор, пока у тела достаточно энергии, чтобы проскочить область застоя. Заканчиваются колебания тем, что энергии для преодоления области застоя оказывается недостаточно и тело останавливается.

В итоге, график колебаний системы при наличии сухого трения, выглядит так:



Вязкое трение

Если маятник совершает колебания в воздухе или жидкости, то на него действует сила вязкого трения: $\vec{F}_{тр} = -\beta\vec{v}$. В этом случае уравнение колебаний для колебаний вдоль оси X приобретает вид:

$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x}$.

Вводя обозначения $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ и $2\gamma = \frac{\beta}{m}$, получим уравнение:

$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$.

Попробуем сначала понять, что происходит с точки зрения физики. В прошлом году мы проходили переходные процессы, в том числе рассматривали падение тела в вязкой среде. Мы выяснили, что в случае вязких сред, скорость ведёт себя по закону вида $v(t) = v_0\left(1 - e^{-(t/\tau)}\right)$. Примерно также ведёт себя и кинетическая энергия.

Рассмотрим, что происходит с энергией колеблющейся системы. Предположим, что потери энергии малы за период колебаний.

$dE = \vec{F}_{тр} \cdot d\vec{r}$. Учитывая, что $\vec{F}_{тр}$ и $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ противонаправлены, можем записать по оси X: $dE = -\beta v_x dx = -\beta v_x^2 dt$, или, выделяя кинетическую энергию, $\beta v_x^2 = \frac{2\beta}{m} E_к$.

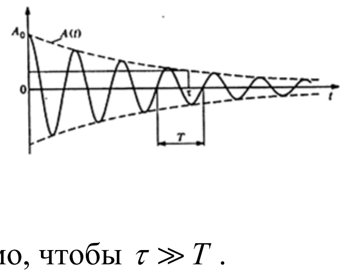
Таким образом, скорость изменения <u>полной</u> энергии осциллятора пропорциональна его <u>кинетической</u> энергии:

$\frac{dE}{dt} = -\beta v_x^2 = -\frac{2\beta}{m} E_к$. Так как кинетическая энергия меняется за период колебаний, энергия теряется неравномерно. Если потери малы, то мы можем усреднить потери за период: $\frac{dE}{dt} = -\frac{2\beta}{m}\langle E_к \rangle$.

Заметим, что в гармоническом осцилляторе $\langle E_к \rangle = \frac{1}{2}E$, поэтому окончательно получаем $\frac{dE}{dt} = -\frac{\beta}{m}E = -2\gamma E$.

Решением этого дифференциального уравнения первого порядка, как мы выяснили в прошлом году, является функция $E(t) = E_0 e^{-2\gamma t}$, где E_0 – энергия системы в начальный момент времени.

Энергия осциллятора пропорциональна квадрату амплитуды колебаний, поэтому для амплитуды затухающих колебаний можно записать $A(t) = A_0 e^{-\gamma t}$, а график затухающих колебаний будет иметь вид, показанный на рис.



Время, равное $\tau = 1/\gamma$, называют *время жизни колебаний*.

Для того чтобы наши рассуждения были верны, необходимо, чтобы $\tau \gg T$.

Найдя выражение для амплитуды колебаний, мы можем получить полное решение нашего уравнения колебаний $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$. Очевидно, что решение не должно сильно отличаться от решения для свободных колебаний (с точностью до изменений амплитуды): $x(t) = A(t)\cos(\omega t + \alpha) = A_0 e^{-\gamma t}\cos(\omega t + \alpha)$.

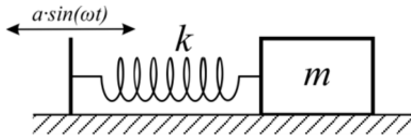
Итак:

$$\dot{x}(t) = A_0\left(-\gamma e^{-\gamma t}\right)\cos(\ ) + A_0 e^{-\gamma t}\left(-\omega \sin(\ )\right),$$ и

$$\ddot{x}(t) = A_0 e^{-\gamma t}\left\{\left(\gamma^2\right)\cos(\ ) + (-\gamma)\left(-\omega\sin(\ )\right) + (-\gamma)\left(-\omega\sin(\ )\right) + \left(-\omega^2\cos(\ )\right)\right\}$$

Подставляя этот кошмар в наше уравнение и сокращая A_0, $e^{-\gamma t}$ и подобные, получим уравнение $\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$, откуда находим $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$.

2. Вынужденные колебания.



Представим себе вновь самый первый пример колебательной системы, который мы рассмотрели в начале года: груз массы m лежит на гладкой горизонтальной плоскости, соединённый пружиной жёсткости k с вертикальной стенкой. Но пусть при этом стенка сама совершает в горизонтальной плоскости гармонические колебания с круговой частотой ω.

В этом случае у нас на тело будет действовать дополнительная сила $F(t) = F_0\cos(\omega t)$, где F_0 определяется максимальным натяжением пружины, при этом мы немного упростим задачу, приняв начальную фазу колебаний стенки равной нулю. Такая сила называется *вынуждающей.*

В отсутствии трения.

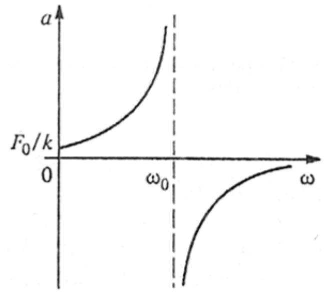
В случае без трения уравнение колебаний запишется в виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f_0\cos\omega t,$$ где $f_0 = \dfrac{F_0}{m}$ и $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$.

Как показывает эксперимент, в случае, когда вязкое трение в системе мало, через продолжительное время система начинает совершать колебания с частотой вынуждающей силы. То есть можно искать *стационарное*[1] решение в виде $x(t) = A\cos\omega t$.

Обратите внимание на отличие ω и ω_0!

Подставляя это решение в уравнение, получаем:



$$\left(-\omega^2 + \omega_0^2\right)A\cos\omega t = f_0\cos\omega t,$$

или

$$A = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Если частота вынуждающей силы ω становится равной частоте собственных колебаний системы ω_0, амплитуда колебаний возрастает до

[1] Кроме стационарного решения, то есть решения для системы, которая уже долго находится в подобных условиях, есть ещё решение для переходного процесса, когда к свободной системе в момент времени $t = 0$ подключают вынуждающую силу. Этот случай мы рассмотрим чуть позже.

бесконечности (то есть вся энергия, привносимая в систему через работу вынуждающей силы, полностью остаётся в системе). Такое состояние называется *резонанс*.

С вязким трением.

Уравнение колебаний в этом случае принимает вид

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \sin\omega t \, .$$

Исследование поведения осциллятора с вязким трением при наличии возвращающей силы показывает, что после выхода системы в устойчивый режим (и такой режим существует), осциллятор совершает колебания с постоянной амплитудой и с частотой, равной частоте вынуждающей силы.

Будем искать решение в виде $x(t) = A\sin(\omega t + \alpha_0)$.

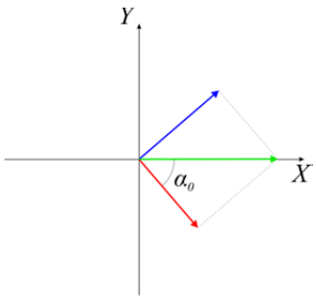
Подставим возможное решение в уравнение:

$$-A\omega^2 \sin(\omega t + \alpha_0) + 2\gamma A\omega \cos(\omega t + \alpha_0) + \omega_0^2 A \sin(\omega t + \alpha_0) = f_0 \sin\omega t$$

или

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\sin(\omega t + \alpha_0) + 2\gamma\omega\cos(\omega t + \alpha_0) = \frac{f_0}{A}\sin\omega t$$

Для нахождения амплитуды и разности фаз воспользуемся методом векторных диаграмм. На рисунке показано красным цветом положение вектора длины $\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)$ при синусе суммы, синим – длины $2\gamma\omega$ при косинусе, зелёным – результирующий вектор длины $\dfrac{f_0}{A}$ с нулевой фазой, соответствующий результату сложения, который должен получиться.



Из рисунка видно, что $\left(\dfrac{f_0}{A}\right)^2 = \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2$, или

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2}},$$

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{2\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}.$$